Hoja 4. Álgebras de Boole. Expresiones booleanas.

Susana Cubillo (2017)

Ejercicios recopilados de los apuntes y
Hojas de problemas de los profesores
del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC
(Campus Montegancedo). UPM.

1. Demuestra que en un álgebra de Boole se verifican las siguientes propiedades:
   a) $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b' \leq a'$
   b) Si $a \leq b$, entonces $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$
   c) Si $a \leq b \leq c$, entonces $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c\ ) = b$
   d) $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' \vee b = 1$

Sol.: a) $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad (a \vee b)' = b' \quad \Leftrightarrow \quad a' \wedge b' = b' \quad \Leftrightarrow \quad b' \leq a'$

b) $a \vee (b \wedge c) = (a \ \vee \ b) \wedge (\ a \ \vee c) = \ b \wedge (a \vee c)$

c) $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c\ ) = a \vee a \vee b \vee a = b$

d) $a \leq b \ \Leftrightarrow \ a \ \wedge b' = b \ \wedge b' \ \Leftrightarrow \ a \wedge b' = 0 \ \Leftrightarrow (a \wedge b')' = 0' \Leftrightarrow a' \vee b = 1$

2. Construye un isomorfismo entre $(\ \wp\{1, 2, 3, 4\}\ ,\ \subseteq\ )$ y $(B^n\ , \leq^n)$, para algún n.

Sol.: h: $\wp\{1, 2, 3, 4\} \ \rightarrow \ B^4$, con $h(\emptyset) = 0000$, $h(\{1\}) = 1000$, $h(\{2\}) = 0100$, $h(\{3\}) = 0010$, $h(\{4\}) = 0001$. Las imágenes del resto de los elemento se obtienen teniendo en cuenta que $h\ (\sup\{A, B\}) = \sup\{\ h(A), h(B)\}$

3. Sea $(A, \leq)$ un álgebra de Boole ¿Cuántos elementos minimales tiene $A - \{0\}$, si A es un álgebra de Boole de 8 elementos? ¿Y si A tiene 16 elementos?

Sol.: Si A tiene 8 elementos, el número de elementos minimales de $A - \{0\}$ es 3.
Si A tiene 16 elementos, el número de elementos minimales de $A - \{0\}$ es 4.

4. Halla la tabla de verdad de la función $f: B^2 \longrightarrow B$ definida por la expresión $E(x, y) = (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$.

x	y	$x \wedge y'$	$x' \vee y$	$y \wedge (x' \vee y)$	$E = (x \wedge y') \vee (y \wedge (x' \vee y))$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0

5. Determina $S(f)$ para las funciones $f: B^3 \longrightarrow B$ definidas por:
   a) $f(x, y, z) = x \wedge y$ b) $f(x, y, z) = z'$ c) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z'$

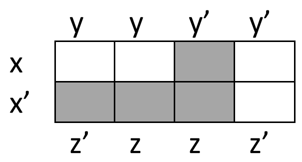
Sol. a) $S(f) = \{111, 110\}$ b) $S(f) = \{110, 100, 010, 000\}$
c) $S(f) = \{111, 110, 100, 010, 000\}$

6. Determina todas las funciones booleanas binarias que cumplen:

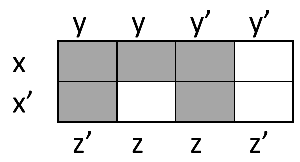
$$f(a', b) = f(a, b') = (f(a, b))'$$

Sol.: 1) $f(a, b) = a'b + ab' + a'b'$ 2) $f(a, b) = ab$

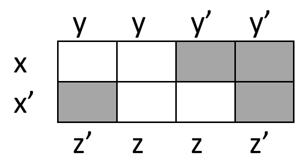
7. Escribe las expresiones booleanas que definen los siguientes mapas de Karnaugh:



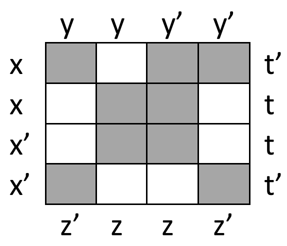
$x'y + y'z$



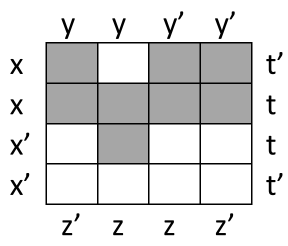
$yz' + y'z + \begin{cases} xy \\ xz \end{cases}$



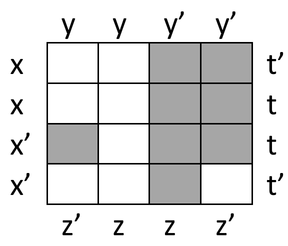
$xy' + x'z'$



$t'z' + tz + \begin{cases} xt'y' \\ xy'z \end{cases}$



$yzt + xy' + xz'$



$x'z't + y'z + xy'$

8. Se considera el conjunto

a) $S(f) = \{(1,1,0,0),\ (1,1,1,1), (1,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,0,0), (0,1,0,1)\}$
b) $S(f) =$
$\{(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)\}$

Simplifica la expresión booleana de la función f que toma valor 1 en el conjunto $S(f)$ y 0 en el resto, mediante el mapa de Karnaugh.

Sol.: a)

	Y	*Y*	*Y'*	*Y'*	
X	////			////	*T'*
X		////	////		*T*
X'	////			////	*T*
X'	////			////	*T'*
	Z'	*Z*	*Z*	*Z'*	

$f(XYTZ)= XTZ + Z'T' + X'Z'$

b)

	Y	*Y*	*Y'*	*Y'*	
X	////		////		*T'*
X		////			*T*
X'	////	////		////	*T*
X'	////	////	////		*T'*
	Z'	*Z*	*Z*	*Z'*	

$f(XYTZ)= X'YZ + Y'ZT' + X'Z'T + YZT + X'Y$

9. Completa los huecos de la tabla teniendo en cuenta que la expresión que se desea obtener ha de ser lo más sencilla posible. Determina esa expresión y dibuja el mapa de Karnaugh correspondiente.

x	y	z	*f(x,y,z)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Sol.:

	Y	Y	Y'	Y'
X	1	1	0	1
X'	1	1	0	1
	Z'	Z	Z	Z'

$f(XYT)= Z' + Y$

10. Dada la función booleana $f: B^4 \longrightarrow B$

$$f(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't,$$

demuestra que $f(x,y,z,t) = xz + x'z'$

a) Utilizando las propiedades de un Álgebra de Boole.

b) Utilizando los mapas de Karnaugh.

Sol.: a)

$$f(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't =$$
$$xzt + xzt' + x'z't' + x'z't = xz + x'z'$$

b)

	Y	Y	Y'	Y'	
X		////	////		T'
X		////	////		T
X'	////			////	T
X'	////			////	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$f(XYTZ)= XZ + X'Z'$

11. Simplifica al máximo las siguientes expresiones booleanas:

a) $(x' + y)' + y'z$ b) $(x'y)'(x' + xyz')$ c) $x(xy' + x'y + y'z)$

d) $(x + y)'(xy')'$ e) $y(x + yz)'$ f) $(x + y'z)(y + z')$

Sol.: a) $(x' + y)' + y'z = xy' + y'z = y'(x + z)$

b) $(x'y)'(x' + xyz') = (x + y')(x' + xyz') = xx' + xyz' + y'x' + y'xyz' = xyz' + y'x'$

c) $x(xy' + x'y + y'z) = xy' + xy'z = xy'$

d) $(x + y)'(xy')' = x'y'(x' + y) = x'y'$

e) $y(x + yz)' = y(x'(yz)') = y\big(x'(y' + z')\big) = yx'z'$

f) $(x+y'z)(y+z') = xy + xz' = x(y+z')$

12. Utilizando el algoritmo de Quine-McCluskey, halla la expresión booleana mínima de la función $f\colon B^5 \longrightarrow B$ tal que
$S(f) = \{(1,1,1,1,1), (1,1,1,0,1), (1,1,0,1,1), (1,0,1,1,1),$
$(1,0,1,0,1), (1,0,0,1,1), (1,1,0,0,1), (1,0,0,0,1)\}$

Sol.: $f(x,y,z,t,u) = xyu + xy'u$

13. Simplifica las expresiones booleanas siguientes por el algoritmo de Quine-McCluskey:

a) $E(x,y,z,t) = xyzt + xyz't + xy'zt + xy'z't + x'yzt + x'y'zt + xyzt' + x'yzt' + x'yz't'$
b) $E(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyz't + xyzt' + x'y'zt + x'yz't + x'yzt + x'yzt'$
c) $E(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't + x'y'zt$
d) $E(x,y,z,t) = xyzt' + xy'zt + xy'zt' + x'yzt + x'yz't + x'y'zt + x'y'z't$

Sol.: a) $E(x,y,z,t) = xyzt + xyz't + xy'zt + xy'z't + x'yzt + x'y'zt + xyzt' + x'yzt' + x'yz't'$

1111 *	1-11*	1--1
1011 *	11-1*	--11
1101*	111-*	~~1--1~~
1110*	-111*	-11-
0111*	10-1*	~~--11~~
1001*	-011*	~~-11-~~
0011*	1-01*	
0110*	-110*	
0100*	0-11*	
	011-*	
	01-0	

	1111	1101	1011	1001	0111	0011	1110	0110	0100
01-0								$\boxed{X}$	$\boxed{X}$
1--1	$\boxed{X}$	$\boxed{X}$	$\boxed{X}$	$\boxed{X}$					
--11	$\boxed{X}$		$\boxed{X}$		$\boxed{X}$	$\boxed{X}$			
-11-	X				X		$\boxed{X}$	X	

$$E(x,y,z,t) = x'yt' + xt + zt + yz$$

b) $E(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyz't + xyzt' + x'y'zt + x'yz't + x'yzt + x'yzt'$

1111 *	1-11*	--11
1011 *	11-1*	-1-1
1101*	111-*	1--1
1110*	-111*	~~--11~~
0111*	-011*	~~-1-1~~
0011*	-101*	~~-11-~~
0101*	-110*	
0110*	0-11*	
	01-1*	
	011-*	

	1111	1011	1101	1110	0111	0011	0101	0110
--11	$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$			$\boxed{\text{X}}$	$\boxed{\text{X}}$		
-1-1	X		$\boxed{\text{X}}$		X		$\boxed{\text{X}}$	
-11-	X			$\boxed{\text{X}}$	X			$\boxed{\text{X}}$

$$E(x,y,z,t) = zt + yt + yz$$

c) $E(x,y,z,t) = xz + x'z' + \begin{cases} y'zt \\ x'y't \end{cases}$

d) $E(x,y,z,t) = x't + x'y + \begin{cases} y'zt + xzt' \\ xy'z + xzt' \\ xy'z + yzt' \end{cases}$

14. Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana cuyo conjunto de verdad es:
    a) $S(f) = \{(01011),(01111),(01001),(01101),(00111),(11010),(11110),(01010),(01110),(00110)\}$
    b) $S(f) = \{(10001),(01101),(10010),(11101),(01111),(10111),(10011),(11111),(10000),(01010)\}$
    c) $S(f) = \{(0001),(0011),(0110),(0111),(1001),(1010),(1011),(1101),(1111)\}$
    d) $S(f) = \{(01111),(01011),(11111),(11011),(10011),(10001),(10010),(10000)\}$
    e) $(f) = \{(0000),(0001),(0010),(0110),(1000),(1001),(1010),(1011),(1110),(1111)\}$

Sol.: a)
b)
c)
d)

e)

15. Encuentra la expresión más sencilla que detecte dentro del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ los números de los siguientes conjuntos:

$A = \{múltiplos\ de\ dos\}$ $\quad$ $B = \{múltiplos\ de\ tres\}$
$C = \{múltiplos\ de\ cuatro\}$ $\quad$ $D = \{números\ primos\}$

Sol.: Se escriben los números del 0 al 15 en sistema binario.

$0 \rightarrow 0000$ $\quad$ $4 \rightarrow 0100$ $\quad$ $8 \rightarrow 1000$ $\quad$ $12 \rightarrow 1100$
$1 \rightarrow 0001$ $\quad$ $5 \rightarrow 0101$ $\quad$ $9 \rightarrow 1001$ $\quad$ $13 \rightarrow 1101$
$2 \rightarrow 0010$ $\quad$ $6 \rightarrow 0110$ $\quad$ $10 \rightarrow 1010$ $\quad$ $14 \rightarrow 1110$
$3 \rightarrow 0011$ $\quad$ $7 \rightarrow 0111$ $\quad$ $11 \rightarrow 1011$ $\quad$ $15 \rightarrow 1111$

A: $E(x, y, z, t) = t'$
B: $E(x, y, z, t) = xyzt + xyz't' + xy'z't + x'yzt' + x'y'zt + x'y'z't'$
C: $E(x, y, z, t) = z't'$
D: $E(x, y, z, t) = x'y'z + y'zt + yz't + \begin{cases} x'yt \\ x'zt \end{cases}$

16. Define una expresión booleana que compare, según el orden $\leq$, cada dos números del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.
Sol.:
$0 \leq 0 \rightarrow 0000$ $\quad$ $1 \leq 0 \rightarrow 0100$ $\quad$ $2 \leq 0 \rightarrow 1000$ $\quad$ $3 \leq 0 \rightarrow 1100$
$0 \leq 1 \rightarrow 0001$ $\quad$ $1 \leq 1 \rightarrow 0101$ $\quad$ $2 \leq 1 \rightarrow 1001$ $\quad$ $3 \leq 1 \rightarrow 1101$
$0 \leq 2 \rightarrow 0010$ $\quad$ $1 \leq 2 \rightarrow 0110$ $\quad$ $2 \leq 2 \rightarrow 1010$ $\quad$ $3 \leq 2 \rightarrow 1110$
$0 \leq 3 \rightarrow 0011$ $\quad$ $1 \leq 3 \rightarrow 0111$ $\quad$ $2 \leq 3 \rightarrow 1011$ $\quad$ $3 \leq 3 \rightarrow 1111$

	Y	*Y*	*Y'*	*Y'*	
X	0	0	1	0	*T'*
X	0	1	1	0	*T*
X'	1	1	1	1	*T*
X'	0	1	1	1	*T'*
	Z'	*Z*	*Z*	*Z'*	

$$E(x, y, z, t) = y'z + x'y' + x't + zt + x'z$$

17. Se considera un ascensor dotado de un dispositivo de seguridad para que no puedan viajar niños pequeños solos, ni pesos excesivos. Queremos que el ascensor se ponga en marcha cuando esté vacío o con pesos entre 25 y 300 kilos. Dotamos al ascensor de tres

sensores: A sensible a cualquier peso, B sensible a pesos mayores de 25 kilos y C sensible a pesos superiores a 300 kilos. Diseña el circuito más sencillo posible que cumpla dichas condiciones.

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	0	0	0	
X'	1	1	1	1	
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x, y, z) = x' + yz'$$

18. Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana que toma
    - valor 1 en el conjunto numérico $C = \{1, 3, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$ y
    - valor 0 en el conjunto numérico $C' = \{0, 2, 4, 8, 9, 10, 11\}$

$S(f) = \{0001, 0011, 0101, 0110, 0111, 1100, 1101, 1110, 1111\}$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	////	////			T'
X	////	////			T
X'	////	////	////	////	T
X'		////			T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x, y, z, t) = x't + yz + xy$$

19. Un examen de tipo test consta de 5 preguntas. Las respuestas correctas son:

    1ª : SI 2ª: NO 3ª: SI 4ª: SI 5ª: NO

    Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos. Se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas.

    Sol.:
    $E(x, y, z, t, u) = ztu' + y'tu' + y'zu' + y'zt + xtu' + xzu' + xzt + xy'u' + xy't + xy'z$

20. El consejo de administración de una empresa está compuesto por cinco miembros, $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$. Se somete a votación la aprobación de un proyecto. La votación es secreta y nadie puede abstenerse. Suponiendo que nadie vota en blanco, obtener una expresión booleana E, en forma de suma de productos de las variables binarias x_i (tales que x_i toma el valor 1 cuando m_i vota SI, y 0 en caso contrario),

que tome el valor 1 cuando se aprueba el proyecto con al menos tres votos favorables de los miembros. Simplifica la expresión E.

Sol.: $E(x,y,z,t,u) = xyz + xyt + xyu + \mathrm{xzt} + \mathrm{xzu} + \mathrm{xtu} + \mathrm{yzt} + \mathrm{yzu} + \mathrm{ytu} + \mathrm{ztu}$

21. Una barrera de paso a nivel depende de un semáforo que muestra uno de los tres colores (verde, rojo, naranja) y una señal luminosa de color blanco. La barrera se cierra para no dejarnos pasar si el semáforo está en rojo o simultáneamente el semáforo está en naranja y la señal blanca activada. Encuentra, mediante un mapa de Karnaugh la expresión booleana más simple, en forma de suma de productos, que representa la apertura de dicha barrera.

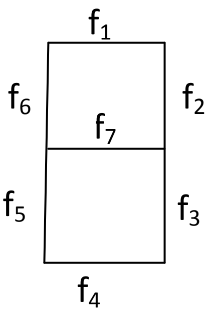
Sol.:

V	R	N	B	
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	1	1	T'
X	1	1	1	1	T
X'	0		0		T
X'	0		1	1	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$E(x,y,z,t) = x + x'y't'$

22. La aparición de una cifra decimal en el visor de una calculadora se produce mediante un circuito con cuatro entradas, que se corresponden con el código binario del dígito y siete salidas $\{f_i \,/\, i = 1, \ldots, 7\}$, que se presentan como pequeños segmentos, iluminados o no en el visor, según el siguiente esquema:



a) Traza la tabla de verdad de cada una de las funciones booleanas f_i: $B^4 \to B$ que represente este fenómeno binario.
b) Encuentra expresiones mínimas en forma de suma de productos para f_1 y f_2.

Sol.: f_1 :

$0 \to 0000 \ \to 1 \qquad 1 \to 0001 \to 0 \qquad 2 \to \ 0010 \to 1 \qquad 3 \to 0011 \to 1$

$4 \to 0100 \ \to 0 \qquad 5 \to \ 0101 \to 1 \qquad 6 \to \ 0110 \to 0 \qquad 7 \to 0111 \to 1$

$8 \to 1000 \ \to 1 \qquad 9 \to \ 1001 \to 1$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	1	1	T'
X	1	1	1	1	T
X'	1	1	1	0	T
X'	0	0	1	1	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = x + yt + y't' + \begin{cases} y'z \\ zt \end{cases}$$

f_2 :

$0 \to 0000 \ \to 1 \qquad 1 \to 0001 \to 1 \qquad 2 \to \ 0010 \to 1 \qquad 3 \to 0011 \to 1$

$4 \to 0100 \ \to 1 \qquad 5 \to \ 0101 \to 0 \qquad 6 \to \ 0110 \to 0 \qquad 7 \to 0111 \to 1$

$8 \to 1000 \ \to 1 \qquad 9 \to \ 1001 \to 1$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	0	0	1	1	T'
X	0	1	1	1	T
X'	0	1	1	1	T
X'	1	0	1	1	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = y' + x'z't' + zt$$

23. Para evitar errores de transmisión en ciertos mensajes codificados, es frecuente añadir un bit, llamado de control, a un bloque de bits. Así, por ejemplo, en la representación de cifras decimales mediante un código binario,
    0 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00001$
    1 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00010$
    2 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00100$
    3 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00111$

El bit de paridad c vale 1 si el número de unos del bloque es par y vale 0 en caso contrario. Define una expresión para c que verifique lo anterior para los dígitos del 0 al 9, de manera que sea lo más simplificada posible en la forma suma de productos.

Sol.: $0 \to 0000 \to 1$ $1 \to 0001 \to 0$ $2 \to 0010 \to 0$ $3 \to 0011 \to 1$

$4 \to 0100 \to 0$ $5 \to 0101 \to 1$ $6 \to 0110 \to 1$ $7 \to 0111 \to 0$

$8 \to 1000 \to 0$ $9 \to 1001 \to 1$

	Y	*Y*	*Y'*	*Y'*	
X	0	1	0	0	*T'*
X	1	1	1	1	*T*
X'	1	0	1	0	*T*
X'	0	1	0	1	*T'*
	Z'	*Z*	*Z*	*Z'*	

$$E(x,y,z,t) = xt + yz't + yzt' + y'zt + x'y'z't'$$

24. Cuatro personas X, Y, Z, T, cuyos votos valen respectivamente, 1, 4, 6 y 9 puntos, votan sobre distintos proyectos. Ninguna de las cuatro personas se abstiene, ni vota en blanco o nulo.

    Se denotan por *x, y, z, t,* las variables que toman el valor 1 cuando las personas X, Y, Z y T, respectivamente, votan a favor del proyecto y toman el valor 0 cuando votan en contra del mismo.

    a) Obtener una expresión booleana para la función $f(x,y,z,t)$ que toma el valor 1 cuando el proyecto es aceptado con mayoría absoluta de puntos (al menos 11 puntos) y 0 en caso contrario.

    b) Simplificar la expresión anterior en forma de "suma de productos".

Sol.: a) $E(x,y,z,t) = xyzt + xyzt' + xyz't + xy'zt + x'yzt + x'yz't + x'y'zt$

b) $E(x,y,z,t) = xyz + yt + zt$ (Por McCluskey o por Karnaugh)

25. Un circuito eléctrico que consta de tres interruptores A, B y C y de una lámpara L(A,B,C) cumple las siguientes condiciones:

    1. L se enciende si A y C están cerrados o si B y C están cerrados.
    2. L se apaga si están A y C abiertos y B cerrado, si están A cerrado y B y C abiertos o si están A y B cerrados y C abierto.

Obtener una expresión booleana para la lámpara L(A,B,C), en forma de suma de productos mínima, que verifique las condiciones anteriores.

Sol.:

A	B	C	L(A,B,C)
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0

	Y	Y	Y'	Y'
X	1	0	0	1
X'	1	0	0	1
	Z'	Z	Z	Z'

$$E(x,y,x) = z'$$

26. Una asamblea de 36 personas es convocada a votar para aceptar o rechazar distintas propuestas. La asamblea está dividida en cuatro grupos X, Y, Z, T, que cuentan con 5, 8, 10 y 13 miembros, respectivamente. A cada propuesta, todos los miembros de un grupo votan en el mismo sentido y nunca un grupo se abstiene. Las propuestas se aceptan si y sólo si alcanzan la mayoría absoluta.
    a) Determina la tabla de verdad de la función $f(x,y,z,t)$ que toma valor 1 si se aprueba una propuesta y 0 si se rechaza.
    b) Determina una expresión booleana para $f(x,y,z,t)$ en forma de suma de productos mínima.

Sol.: a)

X	Y	Z	T	
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

b)

	Y	Y	Y'	Y'	
X	0	1	0	0	T'
X	1	1	1	0	T
X'	0	1	1	0	T
X'	1	0	0	0	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = zt + xyz + xyt + x'yz't'$$

27. Definir una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función f que a cada número de 0 a 15 le hace corresponder el valor cero si el número es menor que 5 y el valor uno si el número es mayor o igual que 5.

Sol.:

$0 \to 0000 \to 0 \quad 1 \to 0001 \to 0 \quad 2 \to 0010 \to 0 \quad 3 \to 0011 \to 0$

$4 \to 0100 \to 0 \quad 5 \to 0101 \to 1 \quad 6 \to 0110 \to 1 \quad 7 \to 0111 \to 1$

$8 \to 1000 \to 1 \quad 9 \to 1001 \to 1$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	1	1	T'
X	1	1	1	1	T
X'	1	1	0	0	T
X'	0	1	0	0	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = x + yz + yt$$

28. Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana que toma el valor 1 en el subconjunto de los números que no son primos del conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$.

Sol.: $0 \to 0000 \to 1 \quad 1 \to 0001 \to 1 \quad 2 \to 0010 \to 0 \quad 3 \to 0011 \to 0$

$4 \to 0100 \to 1 \quad 5 \to 0101 \to 0 \quad 6 \to 0110 \to 1 \quad 7 \to 0111 \to 0$

$8 \to 1000 \to 1 \quad 9 \to 1001 \to 1 \quad 10 \to 1010 \to 1 \quad 11 \to 1011 \to 0$

$12 \to 1100 \to 1 \quad 13 \to 1101 \to 0 \quad 14 \to 1110 \to 1 \quad 15 \to 1111 \to 1$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	1	1	T'
X	0	1	0	1	T
X'	0	0	0	1	T
X'	1	1	0	1	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = xt' + y'z' + yt' + xyz$$

29. Define una expresión booleana que distinga los números $\{0,1,3,4,7,8,9,10,11,15\}$ dentro del conjunto $C = \{0,1,2,\dots,15\}$.

Sol.:

	Y	Y	Y'	Y'	
X			////	////	T'
X		////	////	////	T
X'		////	////	////	T
X'	////			////	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = x'z't' + zt + xy' + \begin{cases} y'z' \\ y't \end{cases}$$

30. Encuentra la expresión más sencilla que detecte dentro del conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ los números del conjunto $\{0,3,4,5,7,8,9\}$.

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	1	1	T'
X	1	1	1	1	T
X'	1	1	1	0	T
X'	1	0	0	1	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = x + zt + \begin{cases} yz' + x'z't' \\ yz' + y'z't' \\ yt + x'z't' \end{cases}$$

31. Sea la función booleana $f: B^4 \to B$ tal que $f(x,y,z,t) = 1$ si (x,y,z,t) difiere de $(0,1,0,0)$ dos dígitos como máximo y $f(x,y,z,t) = 0$ en otro caso. Encuentra una expresión mínima, en forma de suma de productos para f .

Sol.:

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	0	1	T'
X	1	0	0	0	T
X'	1	1	0	1	T
X'	1	1	1	1	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = z't' + x'y + x't' + yz' + yt' + x'z'$$

32. El consejo de administración de una empresa se reúne para votar unas propuestas. El peso del voto de cada uno de los miembros es proporcional al porcentaje de acciones que representa. Utilizando el algoritmo de Quine-McCluskey, define una expresión booleana mínima que apruebe la propuesta cuando en la votación se produce mayoría absoluta. (La representación de los miembros del consejo es: A 35%, B 28%, C 21% y D 16%).

    Sol.: $S(f) = \{1100,\ 1010,\ 1001, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}$

1111*	111-*	11--
1110*	11-1*	1-1-
1101*	1-11*	~~11--~~
1011*	-111	1--1
0111*	11-0*	~~1-1-~~
1100*	1-10*	~~1--1~~
1010*	110-*	
1001*	1-01*	
	101-*	
	10-1*	

	1111	1110	1101	1011	0111	1100	1010	1001
-111	$\boxed{X}$				$\boxed{X}$			
11--	$\boxed{X}$	$\boxed{X}$	$\boxed{X}$			$\boxed{X}$		
1-1-	X	X		$\boxed{X}$			$\boxed{X}$	
1--1	X		X	X				$\boxed{X}$

$$E(x,y,z,t) = xt + xz + xy + yzt$$

33. Construye una función booleana que calcule el tercer dígito del resultado, en binario y leyendo de derecha a izquierda, de multiplicar por 5 un número de 0 a 9. Encuentra una expresión mínima, en forma de suma de productos, para esta función.

Sol.:

$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0000 \rightarrow 0$ $\quad$ $1 \rightarrow 5 \rightarrow 0101 \rightarrow 1$ $\quad$ $2 \rightarrow 10 \rightarrow 1010 \rightarrow 0$

$3 \rightarrow 15 \rightarrow 1111 \rightarrow 1$ $\quad$ $4 \rightarrow 20 \rightarrow 10100 \rightarrow 1$ $\quad$ $5 \rightarrow 25 \rightarrow 11001 \rightarrow 0$

$6 \rightarrow 30 \rightarrow 11110 \rightarrow 1$ $\quad$ $7 \rightarrow 35 \rightarrow 100011 \rightarrow 0$ $\quad$ $8 \rightarrow 40 \rightarrow 101000 \rightarrow 0$

$9 \rightarrow 45 \rightarrow 101101 \rightarrow 1$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	0	0	T'
X	0	0	1	1	T
X'	0	0	1	1	T
X'	1	1	0	0	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x,y,z,t) = y't + yt'$$

34. Una empresa química consta de una planta de producción donde se elaboran los productos diferentes $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$. La dirección de la empresa desea abrir una nueva planta de producción de pequeño tamaño en la que se fabriquen sólo algunos de los productos. Considerando que los productos P_1, P_3 deben elaborarse conjuntamente, los productos P_5, P_6, P_8 deben elaborarse conjuntamente, los productos P_2, P_7 deben elaborarse conjuntamente y que los beneficios previstos por la elaboración de cada uno de los productos, son los que se presentan en la siguiente tabla:

Producto	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
Beneficio	6	4	2	2	4	2	3	3

Diseñar una estrategia para obtener un beneficio de, al menos, 15 unidades, construyendo una función booleana que represente el problema, definida por su expresión.

Sol.:

$X = \{P_1, P_3\} \rightarrow 8$ $\quad$ $Y = \{P_5, P_6, P_8\} \rightarrow 9$ $\quad$ $Z = \{P_2, P_7\} \rightarrow 7$ $\quad$ $T = \{P_4\} \rightarrow 2$

$$S(f) = \{1111, 1110, 1101, 1011, 0111, 1100, 1010, 0110\}$$

	Y	Y	Y'	Y'	
X	1	1	1	0	T'
X	1	1	1	0	T
X'	0	1	0	0	T
X'	0	1	0	0	T'
	Z'	Z	Z	Z'	

$$E(x, y, z, t) = yz + xy + xz$$